

3 Planetenmodell und Zustandsgleichungen

allgemein gilt: $p(\vec{r}) = p[\varrho(\vec{r}), T(\vec{r}), \chi(\vec{r})]$

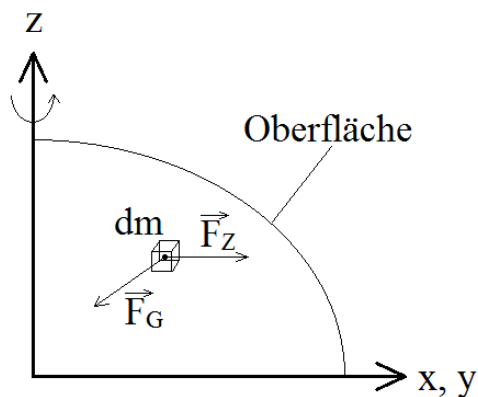
p ... Druck

ϱ ... Dichte

T ... Temperatur

χ ... symbolisch für chemische Zusammensetzung

3.1 Hydrostatisches Gleichgewicht



$$\vec{\text{grad}} p = (\vec{g} + \vec{a}_R) \cdot \varrho$$

G ... gravitativ

Z ... zentrifugal

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{dm} \quad \dots \quad \text{Fallbeschleunigung}$$

$$\vec{a}_R = \frac{\vec{F}_Z}{dm} = \omega^2 \cdot \vec{r}_{x,y} \quad \dots \quad \text{Zentrifugalbeschleunigung}$$

$\vec{r}_{x,y}$... Anteil von \vec{r} , der parallel zur x - y -Ebene ist

(Vergleiche: $-\vec{\text{grad}} U = -\vec{\text{grad}} (U_G + U_R) = \vec{g} + \vec{a}_R$, d. h. Isobaren und Äquipotentialflächen fallen zusammen, solange ϱ näherungsweise winkelunabhängig ist.)

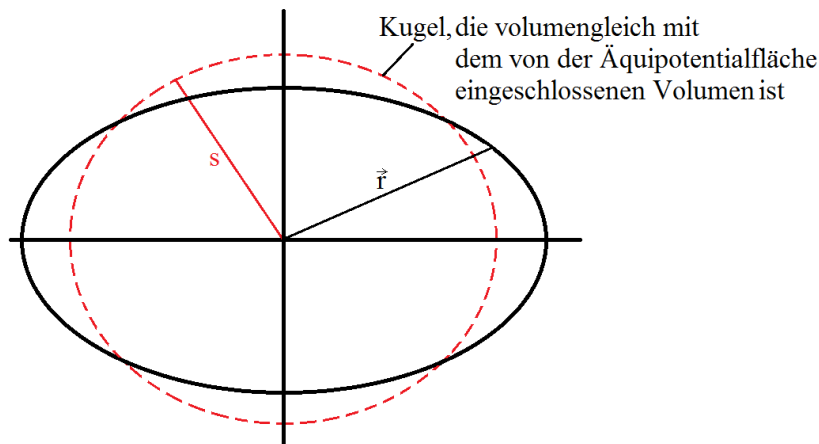
Näherung für langsame Rotation:

$$\frac{dp}{ds} \approx -\bar{g}(s)\varrho(s) + \bar{a}_R(s)\varrho(s), \text{ wobei } \bar{a}_R \approx \frac{2}{3}\omega^2 s \text{ (aus Mittelung über Kugeloberfläche)}$$

$$\text{und } \bar{g} = -\frac{GM(< s)}{s^2} \text{ (Masse der eingeschlossenen „Kugel“)}$$

Spezialfall für konstante Dichte:

$$\text{Zentrumsdruck: } p(s=0) = \frac{3GM^2}{8\pi R^4} - \frac{\omega^2}{4\pi R} \text{ (R ... Äquatorradius)}$$



Zusammenhang zwischen Druck und Dichte:

Unter Verwendung des Kompressionsmodul $K \equiv \varrho \cdot \frac{dp}{d\varrho} \approx K_0 + \left(\frac{\partial K}{\partial p}\right)_0 p$ (Taylorentwicklung 1.Ordnung) folgt für den Zusammenhang zwischen Druck p und Dichte ρ :

$$\varrho = \varrho_0 \left(1 + p \frac{\dot{K}_0}{K_0}\right) \frac{1}{\dot{K}_0}, \quad \text{wobei } \dot{K}_0 = \left(\frac{\partial K}{\partial p}\right)_0$$

bzw.

$$p = \frac{K_0}{\dot{K}_0} \left[\left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right) \dot{K}_0 - 1 \right]. \quad (3.1)$$

Beispiele für Materialkonstanten:

Silikat: $K_0 \approx 225 \text{ GPa}, \quad \dot{K}_0 = 3,5$

flüssiges Eisen: $K_0 \approx 136 \text{ GPa}, \quad \dot{K}_0 = 5$

3.2 Wärmehaushalt

- Grundgleichung: $\varrho \cdot c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\vec{k} \cdot \vec{\text{grad}} T) + H$
 c_p ... spezifische Wärmekapazität bei konstanten Druck
 k ... Wärmeleitfähigkeit
 H ... Wärmequellen-/ -senkendichte
- Wärmesenken: - Abstrahlung
- Volumenausdehnungsarbeit, wenn c_v statt c_p
- chemische Umwandlung, Phasenübergänge
- Wärmequellen: - Einstrahlung
- gravitative Kontraktion/Verdichtung
- Radioaktivität
- Gezeitenreibung (hauptsächlich Ozeane)
- ohmscher Widerstand

- Volumen $\propto R^3$, Oberfläche $\propto R^2$:
 - für Riesen: Energiehaushalt dominiert durch innere Quellen
 - für erdähnliche: Oberflächentemperatur durch Einstrahlung dominiert
- (Erde: $\frac{1}{4} \cdot 1,37 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2} \leftrightarrow 87 \frac{\text{mW}}{\text{m}^2}$)
- von außen von innen

3.3 Seismologie

Druck- und Scherwellen durchlaufen Himmelskörper: gemessen für Erde, Mond, Sonne, Sterne, Jupiter, bald Mars

Ausbreitungsgeschwindigkeiten:

- Druckwellen, Longitudinalwellen, P(rimär)-Wellen:

$$v_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}}$$

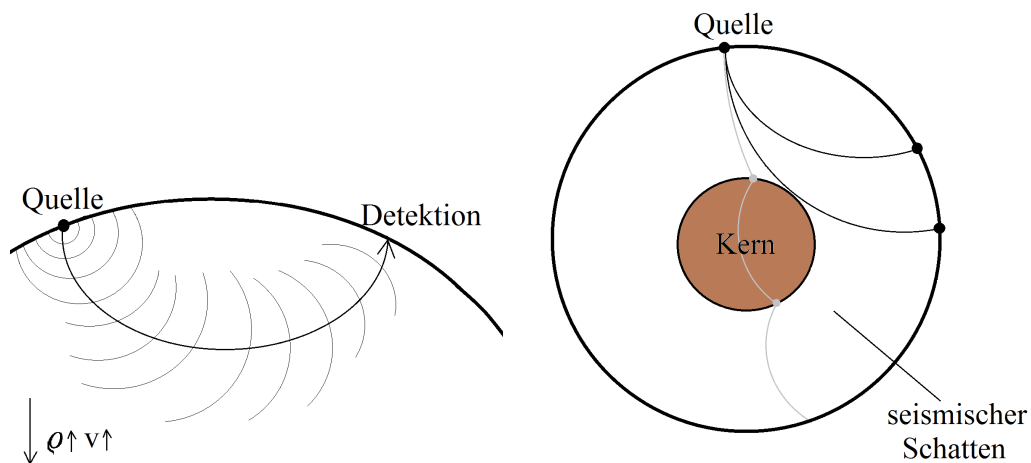
K ... Kompressionsmodul
 G ... Scher-/Torsionsmodul
 ρ ... Dichte

- typisch für die Erde: ~ 10 km/s

- Scherwellen, Transversalwellen, S(ekundär)-Wellen: $v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

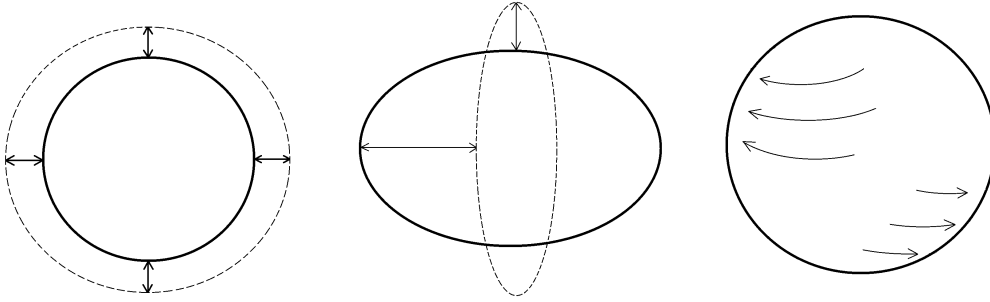
- Oberflächenwellen: Love und Rayleigh: $v_R \leq v_L \leq v_s \leq v_p$

- G und K nehmen schneller mit Tiefe zu als $\rho \rightarrow$ Geschwindigkeiten steigen
- „seismische Dichte“ (in Anlehnung an optische Dichte) nimmt mit Tiefe ab
- Wellen werden zur Oberfläche hingebrochen:



- aus Laufzeiten und Entfernungen $\frac{K}{\rho}$ und $\frac{G}{\rho}$ bestimmbar

Einschub freie Oszillatoren: Schwingungsarten:



u. a. für Jupiter berechnet und 2011 gemessen: Amplitude 50 cm/s, Frequenz 1,2 mHz

3.4 Erdähnliche Planeten

Trends mit zunehmender Masse:

- höhere Dichte
- zunehmende Differentiation
- abnehmende Krustendichte

Aber: keine lineare Beziehung zwischen Masse und Zusammensetzung:

- Merkur massearm aber eisenreich
 - Mars massearm und eisenärmer
 - Nulldruckdichten: $\rho_{\text{Venus}} = 5,3 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $\rho_{\text{Mars}} = \rho_{\text{Erde}} = 4,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$, $\rho_{\text{Mars}} = 3,8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ (Dichten, die die Planeten hätten, wenn sie nicht durch die eigene Gravitation komprimiert würden)
- Zusammensetzung der erdähnlichen Planeten ähnlich, aber nicht gleich
- es bleiben Unsicherheiten, z. B. bezüglich Größe und Zustand von Mond- und Marskern

3.5 Gasplaneten

Allgemein: „Oberfläche“ bzw. Radius definiert durch 1-bar-Isobare

Jupiter und Saturn:

- niedrige Dichte → viel H und He
- dichter Kern, eisenreich: 5 – 10 M_{\oplus} für Jupiter, $\sim 1 M_{\oplus}$ für Saturn (?)
- ummantelt von Eis und Silikat
- insgesamt jeweils 15 – 30 M_{\oplus} in schweren Elementen ($Z > 2$)
- erwarteter „Regen“ von flüssigem He aus metallischen H auf den Kern → Energie wird frei
- Verhältnis Abstrahlung/Einstrahlung: Jupiter 1,68, Saturn 1,79

Uranus und Neptun:

- dichter Kern erdähnlicher Zusammensetzung
 - Mantel aus (druck-)ionisiertem Eis (Wasser, Ammoniak)
 - Hülle aus molekularem H_2 , He, CH_4
 - Verhältnis Abstrahlung/Einstrahlung: Neptun 2,6, Uranus 1,06
- Neptun hat nennenswerte innere Energiequelle, Uranus nicht