Das Sonnensystem – Übungen

Lösungsvorschläge zur 7. Übungsserie

2017-12-21

Aufgabe 7.1

Minimal schlägt ein Objekt (unter Vernachlässigung der Atmosphäre) mit Fluchtgeschwindigkeit ein, da es ja aus Sicht der Erde aus dem Unendlichen kommt und mindestens die auf dem Weg zur Erdoberfläche freiwerdende potentielle Energie in kinetische Energie umsetzt:

$$v_{\mathrm{imp}} \geq v_{\mathrm{grav}} = \sqrt{\frac{2GM_\oplus}{R_\oplus}} \approx 11 \text{ km/s}. \tag{1}$$

Im anderen Extrem kann sich zu dieser Energie noch die zur Bahngeschwindigkeit von Erde und Impaktor gehörende gesellen. Letzterer kann, damit er noch zum Sonnensystem gehört, maximal die lokale Fluchtgeschwindigkeit im Bezug auf die Sonne haben, also

$$v_\infty < \sqrt{\frac{2GM_\odot}{a_\oplus}} = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{1 \text{ au}}} = 42 \text{ km/s}. \tag{2}$$

Schlimmstenfalls fliegt das Objekt dabei retrograd, also entgegen der Bewegung der Erde, und man kann dazu noch deren

$$v_\oplus = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}} = 30 \text{ km/s} \tag{3}$$

linear addieren. Die Gesamtgeschwindigkeit folgt dann aus der Addition der Energien:

$$E_{\mathrm{imp}} < \frac{1}{2} m_{\mathrm{imp}} v_{\mathrm{imp}}^2 \tag{4}$$

$$< \frac{1}{2} m_{\mathrm{imp}} \left(v_{\mathrm{grav}}^2 + (v_\infty + v_\oplus)^2 \right) \tag{5}$$

$$v_{\mathrm{imp}} < \sqrt{v_{\mathrm{grav}}^2 + (v_\infty + v_\oplus)^2} \approx 73 \text{ km/s}. \tag{6}$$

Die Fluchtgeschwindigkeit der Erde spielt bei dieser quadratischen Addition kaum noch eine Rolle. Insgesamt folgt also

$$11 \text{ km/s} \leq v_{\mathrm{imp}} \leq 73 \text{ km/s}. \tag{7}$$

Für einen konkreten Meteoroiden mit $R = 0{,}5$ km und z. B. $\rho = 2 \text{ g cm}^{-3}$ ergibt sich eine Masse

$$M_{\mathrm{imp}} = \frac{4}{3} \pi \rho R_{\mathrm{imp}}^3 \approx 10^{12} \text{ kg} \tag{8}$$

und somit

$$6 \cdot 10^{19} \text{ J} \leq E_{\mathrm{imp}} \leq 3 \cdot 10^{21} \text{ J}. \tag{9}$$

Aus

$$\log_{10} E_{\mathrm{imp}}[J] = 5{,}24 + 1{,}44 M_{\mathrm{Richter}} \tag{10}$$

erhält man dann den Bereich der Magnituden auf der Richter-Skala:

$$10{,}1 \leq M_{\mathrm{Richter}} \leq 11{,}3. \tag{11}$$

Die Werte liegen also selbst bei diesem vergleichsweise kleinen Asteroiden noch oberhalb typischer Starkbeben, deren Magnituden i. d. R. 10,0 nicht überschreiten.

Aufgabe 7.2

Die Zahl von Objekten in einem bestimmten Größeninterval ergibt sich aus

$$N = \int_{R_{\rm min}}^{R_{\rm max}} n(R)\mathrm{d}R = \int_{R_{\rm min}}^{R_{\rm max}} n_0 \left(\frac{R}{R_0}\right)^{\nu} \mathrm{d}R = \frac{n_0 R_0}{\nu+1}\left[\left(\frac{R_{\rm max}}{R_0}\right)^{\nu+1} - \left(\frac{R_{\rm min}}{R_0}\right)^{\nu+1}\right]. \tag{12}$$

Führt man noch $\Delta \equiv R_{\rm max}/R_{\rm min}$ ein, erhält man

$$N(R_{\rm min}) = \frac{n_0 R_0}{\nu+1}\left[\left(\frac{\Delta R_{\rm min}}{R_0}\right)^{\nu+1} - \left(\frac{R_{\rm min}}{R_0}\right)^{\nu+1}\right] = \frac{n_0 R_0}{\nu+1}\left(\frac{R_{\rm min}}{R_0}\right)^{\nu+1}\left[\Delta^{\nu+1} - 1\right]. \tag{13}$$

Für zwei verschiedene Bereiche derselben Größenverteilung (d. h. demselben R_0 und n_0) und desselben Δ (hier: $R_{\rm min} = 1$ mm, $R'_{\rm min} = 100$ m und $\Delta = 10$) folgt

$$\frac{N(R'_{\rm min})}{N(R_{\rm min})} = \left(\frac{R'_{\rm min}}{R_{\rm min}}\right)^{\nu+1} = \left(\frac{100\ \mathrm{m}}{1\ \mathrm{mm}}\right)^{\nu+1} \overset{\nu=-3,5}{=} \left(10^5\right)^{-2,5} = 10^{-12.5} \approx 3 \cdot 10^{-13}. \tag{14}$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein so großes Objekt fallen zu sehen, ist also um den Faktor $3 \cdot 10^{-13}$ geringer als bei einer normalen Sternschnuppe. Statt 15 Minuten müsste man 95 Mio. Jahre warten.