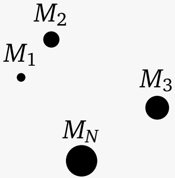
6. Himmelsmechanik

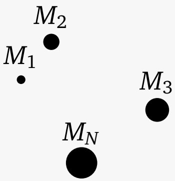
…ist die astronomische Disziplin, die sich mit der Bewegung der Himmelskörper befasst.

6.1. Probleme der Himmelsmechanik



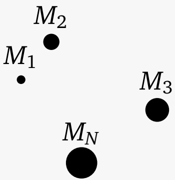
Das N-Körper-Problem:

- N Punktmassen im leeren Raum



Das *N*-Körper-Problem:

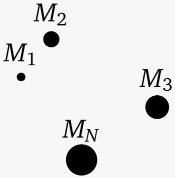
- *N* Punktmassen im leeren Raum
- Wechselwirkung entsprechend Newton'schem Gravitationsgesetz



Das N-Körper-Problem:

- N Punktmassen im leeren Raum
- Wechselwirkung entsprechend Newton'schem Gravitationsgesetz
- oft sehr gute Näherung, da
  - (i) Entfernungen viel größer als Ausdehnung

6.1. Probleme der Himmelsmechanik



Das *N*-Körper-Problem:

- N Punktmassen im leeren Raum
- Wechselwirkung entsprechend Newton'schem Gravitationsgesetz
- oft sehr gute Näherung, da
  - **(i)** Entfernungen viel größer als Ausdehnung
  - **(ii)** Ausdehnung meist nahezu kugelförmig

6.1. Probleme der Himmelsmechanik

Beispiele für weitere Probleme:

- Verallgemeinerung des *N*-Körper-Problems auf Bewegung und Rotation ausgedehnter, nichtsphärischer Körper (u. a. Präzessions- und Nutationstheorie)
- Bewegung eines ausgedehnten Körpers in nichtgleichförmigem Gravitationsfeld (u. a. Gezeitentheorie)
- Bewegung künstlicher Himmelskörper mit Triebwerk (Astrodynamik)
- Bewegung in starken Gravitationsfelder (z. B. nahe Neutronensternen) oder Untersuchung mit sehr hoher Genauigkeit (z. B. Navigationssatelliten): Allgemeine Relativitätstheorie (relativistische Himmelsmechanik)

6.1. Probleme der Himmelsmechanik

Beispiele für weitere Probleme:

- Verallgemeinerung des N-Körper-Problems auf Bewegung und Rotation ausgedehnter, nichtsphärischer Körper (u. a. Präzessions- und Nutationstheorie)
- Bewegung eines ausgedehnten Körpers in nichtgleichförmigem Gravitationsfeld (u. a. Gezeitentheorie)
- Bewegung künstlicher Himmelskörper mit Triebwerk (Astrodynamik)
- Bewegung in starken Gravitationsfelder (z. B. nahe Neutronensternen) oder Untersuchung mit sehr hoher Genauigkeit (z. B. Navigationssatelliten): Allgemeine Relativitätstheorie (relativistische Himmelsmechanik)

Heute nur das wichtigste: das Zwei-Körper-Problem.

6.1. Probleme der Himmelsmechanik

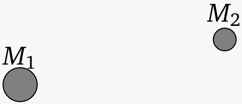
Beispiele für weitere Probleme:

- Verallgemeinerung des N-Körper-Problems auf Bewegung und Rotation ausgedehnter, nichtsphärischer Körper (u. a. Präzessions- und Nutationstheorie)
- Bewegung eines ausgedehnten Körpers in nichtgleichförmigem Gravitationsfeld (u. a. Gezeitentheorie)
- Bewegung künstlicher Himmelskörper mit Triebwerk (Astrodynamik)
- Bewegung in starken Gravitationsfelder (z. B. nahe Neutronensternen) oder Untersuchung mit sehr hoher Genauigkeit (z. B. Navigationssatelliten): Allgemeine Relativitätstheorie (relativistische Himmelsmechanik)

Heute nur das wichtigste: das Zwei-Körper-Problem.

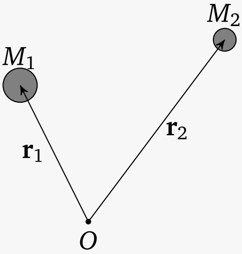
Wer mehr wissen möchte: Vorlesung „*Celestial Mechanics*“,
von Prof. Krivov (fast) jedes Jahr im Wintersemester gehalten.

6.2. Bewegungsgleichung



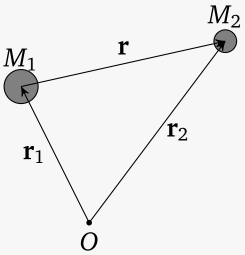
M_1 . . . „Sonne“
M_2 . . . „Planet“

6.2. Bewegungsgleichung



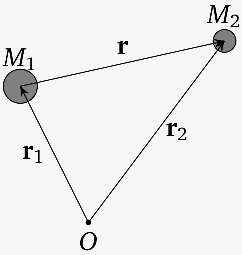
$M_1 \ldots$ „Sonne“
$M_2 \ldots$ „Planet“
$O \ldots$ Ursprung

6.2. Bewegungsgleichung



$M_1 \ldots$ „Sonne“
$M_2 \ldots$ „Planet“
$O \ldots$ Ursprung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$
$$r \equiv |\mathbf{r}|$$
$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$$



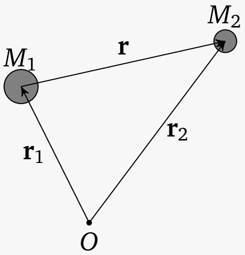
$M_1 \ldots$ „Sonne“
$M_2 \ldots$ „Planet“
$O \ldots$ Ursprung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$
$$r \equiv |\mathbf{r}|$$
$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$$

Laut Gravitationsgesetz wirkt auf die Sonne

$$\overbrace{M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1}^{\mathbf{F}_1} = \frac{G M_1 M_2}{r^3} \mathbf{r} \tag{1}$$

6.2. Bewegungsgleichung



$M_1 \ldots$ „Sonne“
$M_2 \ldots$ „Planet“
$O \ldots$ Ursprung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$
$$r \equiv |\mathbf{r}|$$
$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$$

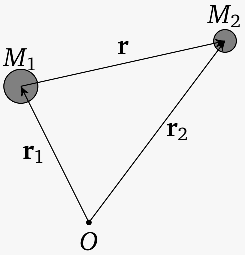
Laut Gravitationsgesetz wirkt auf die Sonne

$$\overbrace{M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1}^{\mathbf{F}_1} = \frac{GM_1M_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

und auf den Planeten entsprechend

$$\overbrace{M_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}^{\mathbf{F}_2} = -\frac{GM_1M_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

6.2. Bewegungsgleichung



$M_1 \ldots$ „Sonne“
$M_2 \ldots$ „Planet“
$O \ldots$ Ursprung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$
$$r \equiv |\mathbf{r}|$$
$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$$

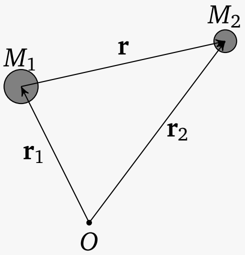
Laut Gravitationsgesetz wirkt auf die Sonne

$$\overbrace{M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1}^{\mathbf{F}_1} = \frac{G M_1 M_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

und auf den Planeten entsprechend

$$\overbrace{M_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}^{\mathbf{F}_2} = -\frac{G M_1 M_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

6.2. Bewegungsgleichung



$M_1 \ldots$ „Sonne“
$M_2 \ldots$ „Planet“
$O \ldots$ Ursprung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$
$$r \equiv |\mathbf{r}|$$
$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$$

Laut Gravitationsgesetz wirkt auf die Sonne

$$\overbrace{M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1}^{\mathbf{F}_1} = \frac{G M_1 M_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

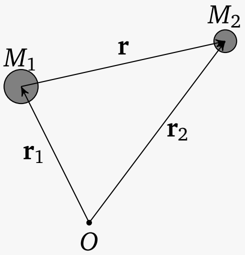
und auf den Planeten entsprechend

$$\overbrace{M_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}^{\mathbf{F}_2} = -\frac{G M_1 M_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

Nach Kürzen und Subtraktion (2)–(1) ergibt sich:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M_1 + M_2)}{r^3}\mathbf{r} \tag{3}$$

6.2. Bewegungsgleichung



$M_1 \ldots$ „Sonne“
$M_2 \ldots$ „Planet“
$O \ldots$ Ursprung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$
$$r \equiv |\mathbf{r}|$$
$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$$

Laut Gravitationsgesetz wirkt auf die Sonne

$$\overbrace{M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1}^{\mathbf{F}_1} = \frac{G M_1 M_2}{r^3}\mathbf{r} \qquad (1)$$

und auf den Planeten entsprechend

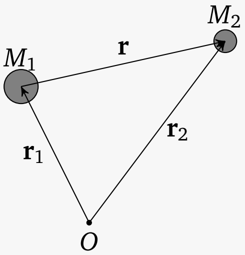
$$\overbrace{M_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}^{\mathbf{F}_2} = -\frac{G M_1 M_2}{r^3}\mathbf{r} \qquad (2)$$

Nach Kürzen und Subtraktion (2)–(1) ergibt sich:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M_1 + M_2)}{r^3}\mathbf{r} \equiv -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}, \qquad (3)$$

wobei $\mu \equiv G(M_1 + M_2)$ definiert wurde.

6.2. Bewegungsgleichung



$M_1 \ldots$ „Sonne“
$M_2 \ldots$ „Planet“
$O \ldots$ Ursprung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$
$$r \equiv |\mathbf{r}|$$
$$\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$$

Laut Gravitationsgesetz wirkt auf die Sonne

$$\overbrace{M_1 \ddot{\mathbf{r}}_1}^{\mathbf{F}_1} = \frac{G M_1 M_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{1}$$

und auf den Planeten entsprechend

$$\overbrace{M_2 \ddot{\mathbf{r}}_2}^{\mathbf{F}_2} = -\frac{G M_1 M_2}{r^3}\mathbf{r} \tag{2}$$

Nach Kürzen und Subtraktion (2)–(1) ergibt sich:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M_1 + M_2)}{r^3}\mathbf{r} \equiv -\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}, \tag{3}$$

wobei $\mu \equiv G(M_1 + M_2)$ definiert wurde.
Gesuchte Lösung: $\mathbf{r}(t)$.
Problem: Gleichungssystem ist 6. Ordnung.
$\Rightarrow$ Wir suchen 6 Bewegungskonstanten (Integrale).

6.3. Drehimpulsintegral

Vektorprodukt $\mathbf{r} \times (3)$ ergibt:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

6.3. Drehimpulsintegral

Vektorprodukt $\mathbf{r} \times (3)$ ergibt:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

Aber es gilt auch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

6.3. Drehimpulsintegral

Vektorprodukt $\mathbf{r} \times$ (3) ergibt:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

Aber es gilt auch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \cancel{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

6.3. Drehimpulsintegral

Vektorprodukt $\mathbf{r} \times (3)$ ergibt:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

Aber es gilt auch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \cancel{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}} + \cancel{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}}$$

6.3. Drehimpulsintegral

Vektorprodukt $\mathbf{r} \times$ (3) ergibt:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

Aber es gilt auch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \cancel{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}} + \cancel{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}} = 0$$

6.3. Drehimpulsintegral

Vektorprodukt $\mathbf{r} \times (3)$ ergibt:

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu \mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3} = 0.$$

Aber es gilt auch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \cancel{\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}} + \cancel{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}} = 0$$

und somit (nach Integration)

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} = \text{const.}$$

Diese Konstante ist der reduzierte (ohne M_2) Drehimpulsvektor des Planeten (im Bezug auf den Stern).

Einerseits ist $\mathbf{c} \perp \mathbf{r}$ (und $\mathbf{c} \perp \dot{\mathbf{r}}$), andererseits gilt $\mathbf{c} = \text{const}$, sodass die Bewegung in einer Ebene (senkrecht zu $\mathbf{c}$) bleibt.

6.4. Energieintegral

Skalarprodukt $\dot{\mathbf{r}} \cdot (3)$ oder $\mathbf{v} \cdot (3)$ ergibt:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

6.4. Energieintegral

Skalarprodukt $\dot{\mathbf{r}} \cdot (3)$ oder $\mathbf{v} \cdot (3)$ ergibt:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Die linke Seite ist eine zeitliche Ableitung:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right)$$

6.4. Energieintegral

Skalarprodukt $\dot{\mathbf{r}} \cdot (3)$ oder $\mathbf{v} \cdot (3)$ ergibt:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Die linke Seite ist eine zeitliche Ableitung:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

6.4. Energieintegral

Skalarprodukt $\dot{\mathbf{r}} \cdot (3)$ oder $\mathbf{v} \cdot (3)$ ergibt:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Die linke Seite ist eine zeitliche Ableitung:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Die rechte Seite auch:

$$-\mu \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\mu \frac{\dot{r} \cdot r}{r^3}$$

6.4. Energieintegral

Skalarprodukt $\dot{\mathbf{r}} \cdot (3)$ oder $\mathbf{v} \cdot (3)$ ergibt:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Die linke Seite ist eine zeitliche Ableitung:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Die rechte Seite auch:

$$-\mu \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\mu \frac{\dot{r} \cdot r}{r^3} = -\mu \frac{\dot{r}}{r^2}$$

6.4. Energieintegral

Skalarprodukt $\dot{\mathbf{r}} \cdot (3)$ oder $\mathbf{v} \cdot (3)$ ergibt:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Die linke Seite ist eine zeitliche Ableitung:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

Die rechte Seite auch:

$$-\mu \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\mu \frac{\dot{r} \cdot r}{r^3} = -\mu \frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mu}{r} \right).$$

6.4. Energieintegral

Skalarprodukt $\dot{\mathbf{r}} \cdot (3)$ oder $\mathbf{v} \cdot (3)$ ergibt:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Die linke Seite ist eine zeitliche Ableitung:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

Die rechte Seite auch:

$$-\mu \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\mu \frac{\dot{r} \cdot r}{r^3} = -\mu \frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mu}{r} \right).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mu}{r} \right)$$

6.4. Energieintegral

Skalarprodukt $\dot{\mathbf{r}} \cdot (3)$ oder $\mathbf{v} \cdot (3)$ ergibt:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Die linke Seite ist eine zeitliche Ableitung:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

Die rechte Seite auch:

$$-\mu \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\mu \frac{\dot{r} \cdot r}{r^3} = -\mu \frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mu}{r} \right).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\mu}{r} \right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0$$

6.4. Energieintegral

Skalarprodukt $\dot{\mathbf{r}} \cdot (3)$ oder $\mathbf{v} \cdot (3)$ ergibt:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\mu \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3}.$$

Die linke Seite ist eine zeitliche Ableitung:

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right).$$

Die rechte Seite auch:

$$-\mu \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = -\mu \frac{\dot{r} \cdot r}{r^3} = -\mu \frac{\dot{r}}{r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu}{r}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu}{r}\right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}\right) = 0$$

oder (nach Integration über t)

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{h}{2}, \qquad h = \text{const.}$$

6.4. Energieintegral

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{h}{2}, \quad h = \text{const}$$

- Links stehen reduzierte (ohne M_2) kinetische und potenzielle Energie.
- „h“ ist die Energiekonstante.

6.4. Energieintegral

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{h}{2}, \quad h = \mathrm{const}$$

- Links stehen reduzierte (ohne M_2) kinetische und potenzielle Energie.
- „h" ist die Energiekonstante.
- $h < 0$: Bewegung räumlich beschränkt, da $r \to \infty$ nicht möglich.

6.4. Energieintegral

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{h}{2}, \quad h = \text{const}$$

- Links stehen reduzierte (ohne M_2) kinetische und potenzielle Energie.
- „h" ist die Energiekonstante.
- $h < 0$: Bewegung räumlich beschränkt, da $r \to \infty$ nicht möglich.
- $h \geq 0$: Bewegung ins Unendliche möglich.

6.4. Energieintegral

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{h}{2}, \quad h = \text{const}$$

- Links stehen reduzierte (ohne M_2) kinetische und potenzielle Energie.
- „h“ ist die Energiekonstante.
- $h < 0$: Bewegung räumlich beschränkt, da $r \to \infty$ nicht möglich.
- $h \geq 0$: Bewegung ins Unendliche möglich.

- Bisher 4 Integrale gefunden. . .

6.5. Laplace-Integral

Vektorprodukt $\mathbf{c} \times (3)$:

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \left(-\frac{\mu\mathbf{r}}{r^3}\right)$$

6.5. Laplace-Integral

Vektorprodukt $\mathbf{c} \times$ (3):

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{\mu}{r^3} \left[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\right]$$

6.5. Laplace-Integral

Vektorprodukt $\mathbf{c} \times (3)$:

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})]$$

oder, da $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})]$$

6.5. Laplace-Integral

Vektorprodukt $\mathbf{c} \times (3)$:

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{\mu}{r^3} \left[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\right]$$

oder, da $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3} \left[\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\right] = \frac{\mu}{r^3} \left[\mathbf{r} r \dot{r} - \dot{\mathbf{r}} r^2\right]$$

6.5. Laplace-Integral

Vektorprodukt $\mathbf{c} \times (3)$:

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})]$$

oder, da $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})] = \frac{\mu}{r^3} \left[\mathbf{r} r \dot{r} - \dot{\mathbf{r}} r^2\right] = \frac{\mu \dot{r} \mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mu \dot{\mathbf{r}}}{r}$$

Vektorprodukt $\mathbf{c} \times$ (3):

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})]$$

oder, da $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})] = \frac{\mu}{r^3} \left[\mathbf{r} r \dot{r} - \dot{\mathbf{r}} r^2\right] = \frac{\mu \dot{r} \mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mu \dot{\mathbf{r}}}{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r}\right).$$

6.5. Laplace-Integral

Vektorprodukt $\mathbf{c} \times (3)$:

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{\mu}{r^3} \left[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\right]$$

oder, da $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3} \left[\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\right] = \frac{\mu}{r^3} \left[\mathbf{r} r \dot{r} - \dot{\mathbf{r}} r^2\right] = \frac{\mu \dot{r} \mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mu \dot{\mathbf{r}}}{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r}\right).$$

Wegen $\mathbf{c} = \text{const}$ gilt aber auch

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}})$$

6.5. Laplace-Integral

Vektorprodukt $\mathbf{c} \times (3)$:

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{\mu}{r^3} \left[\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\right]$$

oder, da $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$,

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mu}{r^3} \left[\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\right] = \frac{\mu}{r^3} \left[\mathbf{r} r \dot{r} - \dot{\mathbf{r}} r^2\right] = \frac{\mu \dot{r} \mathbf{r}}{r^2} - \frac{\mu \dot{\mathbf{r}}}{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(-\frac{\mu \mathbf{r}}{r}\right).$$

Wegen $\mathbf{c} = \mathrm{const}$ gilt aber auch

$$\mathbf{c} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}})$$

und somit

$$\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathrm{const} \equiv -\mu \mathbf{e}.$$

6.5. Laplace-Integral

$$\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \text{const} \equiv -\mu \mathbf{e}. \tag{4}$$

Dies ist das Laplace-Integral und $\mathbf{e}$ ist der Laplace-Vektor.

6.5. Laplace-Integral

$$\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \text{const} \equiv -\mu \mathbf{e}. \tag{4}$$

Dies ist das Laplace-Integral und **e** ist der Laplace-Vektor.

Haben wir jetzt 7 Integrationskonstanten?

$$\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}} + \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \text{const} \equiv -\mu \mathbf{e}. \tag{4}$$

Dies ist das Laplace-Integral und **e** ist der Laplace-Vektor.

Haben wir jetzt 7 Integrationskonstanten?

Nein! Der Laplace-Vektor ist nicht ganz unabhängig von den vorigen Integralen:

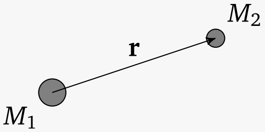
$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{e} = 0$$

und

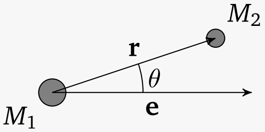
$$\mu^2 (e^2 - 1) = hc^2 \qquad (c = |\mathbf{c}| \quad \text{und} \quad e = |\mathbf{e}|).$$

Es sind also bisher 5 Konstanten. Die sechste ist die Position entlang der Bahn zu einem fixen Zeitpunkt.

6.6. Geometrie der Bahnen



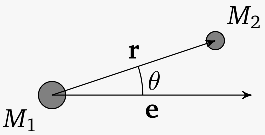
6.6. Geometrie der Bahnen



Wir nutzen $\mathbf{e}$ als Bezugsrichtung, und es folgt:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = re \cos\theta. \tag{5}$$

6.6. Geometrie der Bahnen



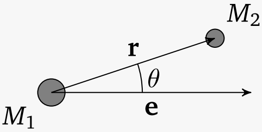
Wir nutzen **e** als Bezugsrichtung, und es folgt:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = re \cos \theta. \tag{5}$$

Andererseits gilt wegen (4) auch:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = -\mathbf{r} \cdot \left[\frac{\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}}{\mu} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right]$$

6.6. Geometrie der Bahnen



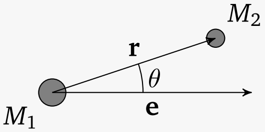
Wir nutzen $\mathbf{e}$ als Bezugsrichtung, und es folgt:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = re \cos\theta. \tag{5}$$

Andererseits gilt wegen (4) auch:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} &= -\mathbf{r} \cdot \left[\frac{\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}}{\mu} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \\ &= \frac{\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c})}{\mu} - r \end{aligned}$$

6.6. Geometrie der Bahnen



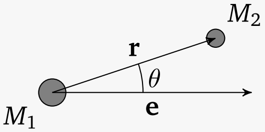
Wir nutzen **e** als Bezugsrichtung, und es folgt:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = re\cos\theta. \tag{5}$$

Andererseits gilt wegen (4) auch:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} &= -\mathbf{r} \cdot \left[\frac{\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}}{\mu} + \frac{\mathbf{r}}{r} \right] \\ &= \frac{\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c})}{\mu} - r = \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{c}}{\mu} - r \end{aligned}$$

6.6. Geometrie der Bahnen



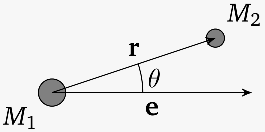
Wir nutzen **e** als Bezugsrichtung, und es folgt:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = re\cos\theta. \tag{5}$$

Andererseits gilt wegen (4) auch:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} &= -\mathbf{r} \cdot \left[\frac{\mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}}{\mu} + \frac{\mathbf{r}}{r}\right] \\
&= \frac{\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{c})}{\mu} - r = \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{c}}{\mu} - r \\
&= \frac{c^2}{\mu} - r. \qquad (6)
\end{aligned}$$

6.6. Geometrie der Bahnen



Wir nutzen **e** als Bezugsrichtung, und es folgt:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{e} = re\cos\theta. \tag{5}$$

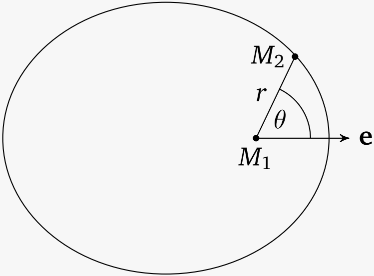
Andererseits gilt wegen (4) auch:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}\cdot\mathbf{e} &= -\mathbf{r}\cdot\left[\frac{\mathbf{c}\times\dot{\mathbf{r}}}{\mu}+\frac{\mathbf{r}}{r}\right] \\
&= \frac{\mathbf{r}\cdot(\dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{c})}{\mu}-r = \frac{(\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}})\cdot\mathbf{c}}{\mu}-r \\
&= \frac{c^2}{\mu}-r. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Nach Gleichsetzen von (6) und (5) ergibt sich die bekannte Gleichung für Kegelschnitte in Polarkoordinaten:

$$r(\theta) = \frac{c^2/\mu}{1+e\cos\theta}.$$

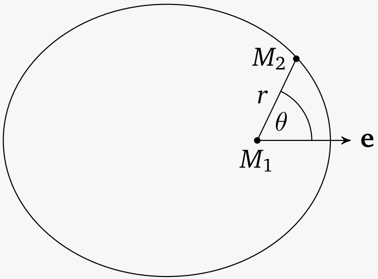
6.6. Geometrie der Bahnen



$$r(\theta) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos\theta}$$

- $\mathbf{e}$ zeigt z. sonnennächsten Pkt. (Perihel)
- $e = |\mathbf{e}| \ldots$ (numerische) Exzentrizität

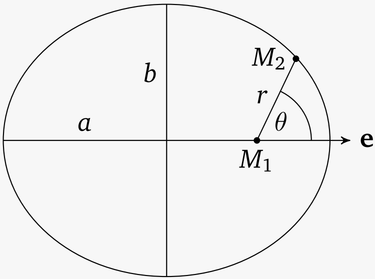
6.6. Geometrie der Bahnen



$$r(\theta) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos\theta}$$

- **e** zeigt z. sonnennächsten Pkt. (Perihel)
- $e = |\mathbf{e}| \ldots$ (numerische) Exzentrizität
  - $0 \leq e < 1$: Ellipse
  - $e = 1$: Parabel
  - $e > 1$: Hyperbel

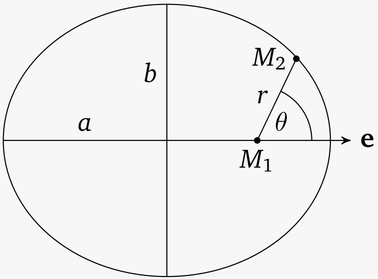
6.6. Geometrie der Bahnen



$$r(\theta) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos\theta}$$

- $\mathbf{e}$ zeigt z. sonnennächsten Pkt. (Perihel)
- $e = |\mathbf{e}|$ ... (numerische) Exzentrizität
  - $0 \leq e < 1$: Ellipse
  - $e = 1$: Parabel
  - $e > 1$: Hyperbel
- a ... große Halbachse
- b ... kleine Halbachse $= a\sqrt{1 - e^2}$

6.6. Geometrie der Bahnen



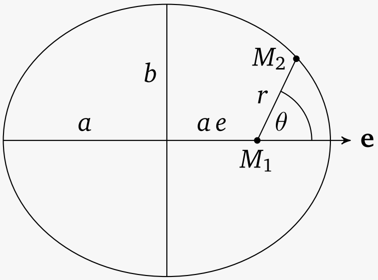
$$r(\theta) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos\theta}$$

- $\mathbf{e}$ zeigt z. sonnennächsten Pkt. (Perihel)
- $e = |\mathbf{e}| \ldots$ (numerische) Exzentrizität
  - $0 \leq e < 1$: Ellipse
  - $e = 1$: Parabel
  - $e > 1$: Hyperbel
- $a \ldots$ große Halbachse
- $b \ldots$ kleine Halbachse $= a\sqrt{1-e^2}$

I. Drehimpulskonstante: $c = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$, weil

$$r_{\min} = a(1-e) \equiv q, \quad r_{\max} = a(1+e) \equiv Q$$

6.6. Geometrie der Bahnen



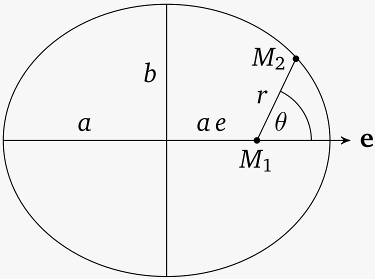
$$r(\theta) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos\theta}$$

- **e** zeigt z. sonnennächsten Pkt. (Perihel)
- $e = |\mathbf{e}|$ ... (numerische) Exzentrizität
  - $0 \leq e < 1$: Ellipse
  - $e = 1$: Parabel
  - $e > 1$: Hyperbel
- a ... große Halbachse
- b ... kleine Halbachse $= a\sqrt{1-e^2}$

I. Drehimpulskonstante: $c = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$, weil

$$r_{\min} = a(1-e) \equiv q, \quad r_{\max} = a(1+e) \equiv Q$$

6.6. Geometrie der Bahnen



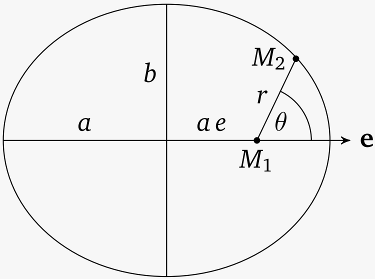
$$r(\theta) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos\theta}$$

- $\mathbf{e}$ zeigt z. sonnennächsten Pkt. (Perihel)
- $e = |\mathbf{e}|$ ... (numerische) Exzentrizität
  - $0 \leq e < 1$: Ellipse
  - $e = 1$: Parabel
  - $e > 1$: Hyperbel
- a ... große Halbachse
- b ... kleine Halbachse $= a\sqrt{1-e^2}$

I. Drehimpulskonstante: $c = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$, weil

$$r_{\text{min}} = a(1-e) \equiv q, \quad r_{\text{max}} = a(1+e) \equiv Q, \quad \text{und somit} \quad r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}.$$

6.6. Geometrie der Bahnen



$$r(\theta) = \frac{c^2/\mu}{1 + e\cos\theta}$$

- $\mathbf{e}$ zeigt z. sonnennächsten Pkt. (Perihel)
- $e = |\mathbf{e}|$ ... (numerische) Exzentrizität
  - $0 \leq e < 1$: Ellipse
  - $e = 1$: Parabel
  - $e > 1$: Hyperbel
- a ... große Halbachse
- b ... kleine Halbachse $= a\sqrt{1-e^2}$

I. Drehimpulskonstante: $c = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$, weil

$$r_{\min} = a(1-e) \equiv q, \quad r_{\max} = a(1+e) \equiv Q, \quad \text{und somit} \quad r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}.$$

II. Energiekonstante (ohne Ableitung): $h = -\mu/a$ und somit

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

6.7. Kepler’sche Gesetze

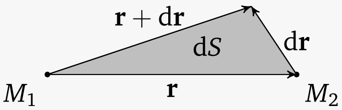
I. Das erste Kepler’sche Gesetz . . . haben wir bereits bewiesen:

Die Bahn eines Planeten ist eine Ellipse mit der Sonne in einem Brennpunkt.

I. Das erste Kepler'sche Gesetz . . . haben wir bereits bewiesen:

Die Bahn eines Planeten ist eine Ellipse mit der Sonne in einem Brennpunkt.

II. Das zweite Kepler'sche Gesetz:

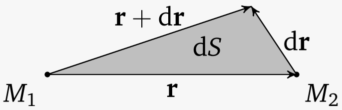


6.7. Kepler'sche Gesetze

I. Das erste Kepler'sche Gesetz ... haben wir bereits bewiesen:

Die Bahn eines Planeten ist eine Ellipse mit der Sonne in einem Brennpunkt.

II. Das zweite Kepler'sche Gesetz:



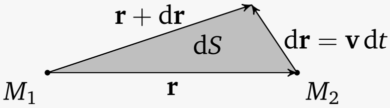
$$dS = \frac{1}{2} \left| \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \right|$$

6.7. Kepler’sche Gesetze

I. Das erste Kepler’sche Gesetz . . . haben wir bereits bewiesen:

Die Bahn eines Planeten ist eine Ellipse mit der Sonne in einem Brennpunkt.

II. Das zweite Kepler’sche Gesetz:



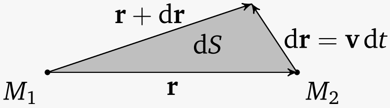
$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\,|\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{r}| \;=\; \frac{1}{2}\,|\mathbf{r} \times (\mathbf{v}\,\mathrm{d}t)|$$

6.7. Kepler'sche Gesetze

I. Das erste Kepler'sche Gesetz … haben wir bereits bewiesen:

Die Bahn eines Planeten ist eine Ellipse mit der Sonne in einem Brennpunkt.

II. Das zweite Kepler'sche Gesetz:



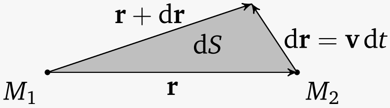
$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{r}\right| = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r} \times (\mathbf{v}\,\mathrm{d}t)\right| = \frac{1}{2}c\,\mathrm{d}t.$$

6.7. Kepler’sche Gesetze

I. Das erste Kepler’sche Gesetz . . . haben wir bereits bewiesen:

Die Bahn eines Planeten ist eine Ellipse mit der Sonne in einem Brennpunkt.

II. Das zweite Kepler’sche Gesetz:



$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\,|\mathbf{r} \times \mathrm{d}\mathbf{r}| \; = \frac{1}{2}\,|\mathbf{r} \times (\mathbf{v}\,\mathrm{d}t)| \; = \frac{1}{2} c\,\mathrm{d}t.$$

Der Radiusvektor eines Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

III. Das dritte Kepler'sche Gesetz:

Integration von dS über eine volle Umlaufperiode P:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^P c \, \mathrm{d}t$$

III. Das dritte Kepler'sche Gesetz:

Integration von dS über eine volle Umlaufperiode P:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^P c \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} c P$$

III. Das dritte Kepler'sche Gesetz:

Integration von dS über eine volle Umlaufperiode P:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^P c \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} c P = \frac{1}{2} \sqrt{\mu a (1 - e^2)} P.$$

III. Das dritte Kepler'sche Gesetz:

Integration von dS über eine volle Umlaufperiode P:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^P c\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}cP = \frac{1}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}P.$$

Andererseits gilt für die Fläche einer Ellipse

$$S = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}.$$

III. Das dritte Kepler'sche Gesetz:

Integration von dS über eine volle Umlaufperiode P:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^P c\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}cP = \frac{1}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}P.$$

Andererseits gilt für die Fläche einer Ellipse

$$S = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}.$$

Nach Gleichsetzen, Quadrieren und Umformen folgt

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu}$$

6.7. Kepler'sche Gesetze

III. Das dritte Kepler'sche Gesetz:

Integration von dS über eine volle Umlaufperiode P:

$$S = \tfrac{1}{2} \int_0^P c \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} cP = \tfrac{1}{2} \sqrt{\mu a (1 - e^2)} P.$$

Andererseits gilt für die Fläche einer Ellipse

$$S = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}.$$

Nach Gleichsetzen, Quadrieren und Umformen folgt

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)}$$

III. Das dritte Kepler'sche Gesetz:

Integration von dS über eine volle Umlaufperiode P:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^P c\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}cP = \frac{1}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}P.$$

Andererseits gilt für die Fläche einer Ellipse

$$S = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}.$$

Nach Gleichsetzen, Quadrieren und Umformen folgt

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{G(M_1+M_2)} \approx \frac{4\pi^2}{GM_1}$$

III. Das dritte Kepler'sche Gesetz:

Integration von dS über eine volle Umlaufperiode P:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^P c\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}cP = \frac{1}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}P.$$

Andererseits gilt für die Fläche einer Ellipse

$$S = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}.$$

Nach Gleichsetzen, Quadrieren und Umformen folgt

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{G(M_1+M_2)} \approx \frac{4\pi^2}{GM_1} \quad (\rightarrow \text{für alle Planeten gleich}).$$

III. Das dritte Kepler'sche Gesetz:

Integration von dS über eine volle Umlaufperiode P:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^P c\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}cP = \frac{1}{2}\sqrt{\mu a(1-e^2)}P.$$

Andererseits gilt für die Fläche einer Ellipse

$$S = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}.$$

Nach Gleichsetzen, Quadrieren und Umformen folgt

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{G(M_1+M_2)} \approx \frac{4\pi^2}{GM_1} \quad (\rightarrow \text{für alle Planeten gleich}).$$

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer großen Halbachsen.

6.8. Bahnelemente

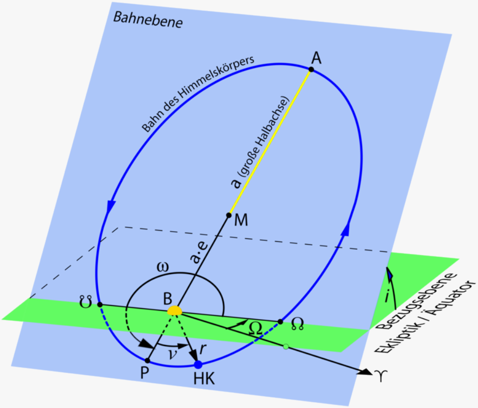
- Die 6 Bewegungsintegrale entsprechen 6 Konstanten, die die Bewegung vollständig beschreiben.

6.8. Bahnelemente

- Die 6 Bewegungsintegrale entsprechen 6 Konstanten, die die Bewegung vollständig beschreiben.
- $(\mathbf{c}, h, \mathbf{e})$ und $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ sind unanschaulich.

6.8. Bahnelemente

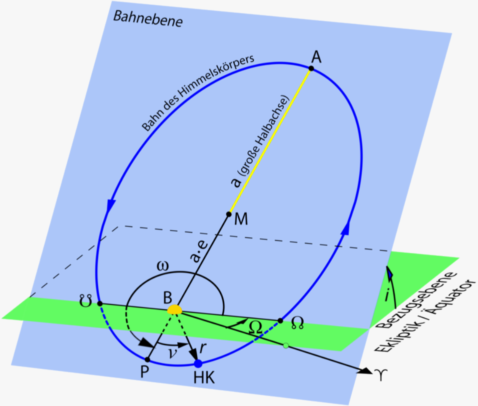
- Die 6 Bewegungsintegrale entsprechen 6 Konstanten, die die Bewegung vollständig beschreiben.
- $(\mathbf{c}, h, \mathbf{e})$ und $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ sind unanschaulich.
- Daher definiert man die Bahn über 6 „Bahnelemente“:



6.8. Bahnelemente

- Die 6 Bewegungsintegrale entsprechen 6 Konstanten, die die Bewegung vollständig beschreiben.
- $(\mathbf{c}, h, \mathbf{e})$ und $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ sind unanschaulich.
- Daher definiert man die Bahn über 6 „Bahnelemente“:

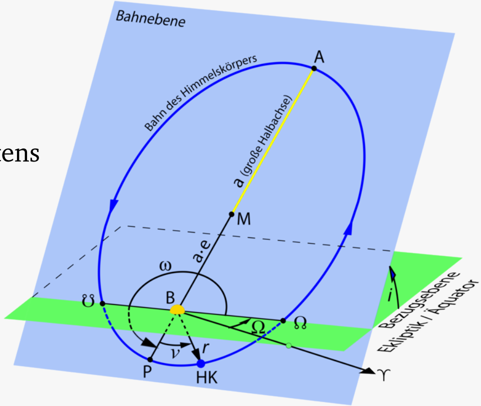
$i \ldots$ Inklination



6.8. Bahnelemente

- Die 6 Bewegungsintegrale entsprechen 6 Konstanten, die die Bewegung vollständig beschreiben.
- $(\mathbf{c}, h, \mathbf{e})$ und $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ sind unanschaulich.
- Daher definiert man die Bahn über 6 „Bahnelemente“:

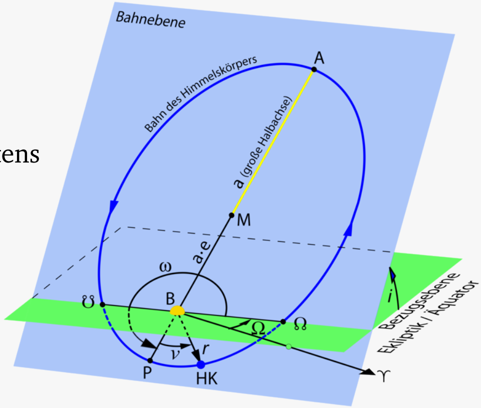
i … Inklination
Ω … Länge des aufsteigenden Knotens



6.8. Bahnelemente

- Die 6 Bewegungsintegrale entsprechen 6 Konstanten, die die Bewegung vollständig beschreiben.
- $(\mathbf{c}, h, \mathbf{e})$ und $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ sind unanschaulich.
- Daher definiert man die Bahn über 6 „Bahnelemente“:

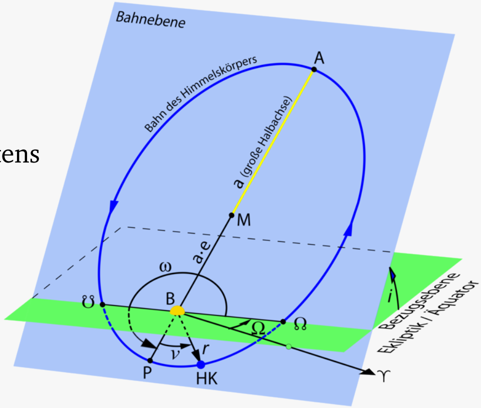
i … Inklination
Ω … Länge des aufsteigenden Knotens
ω … Argument des Perizentrums



6.8. Bahnelemente

- Die 6 Bewegungsintegrale entsprechen 6 Konstanten, die die Bewegung vollständig beschreiben.
- $(\mathbf{c}, h, \mathbf{e})$ und $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ sind unanschaulich.
- Daher definiert man die Bahn über 6 „Bahnelemente“:

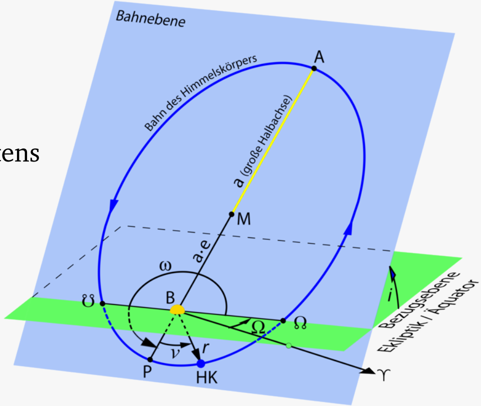
$i \ldots$ Inklination
$\Omega \ldots$ Länge des aufsteigenden Knotens
$\omega \ldots$ Argument des Perizentrums
$a \ldots$ große Halbachse



6.8. Bahnelemente

- Die 6 Bewegungsintegrale entsprechen 6 Konstanten, die die Bewegung vollständig beschreiben.
- $(\mathbf{c}, h, \mathbf{e})$ und $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ sind unanschaulich.
- Daher definiert man die Bahn über 6 „Bahnelemente“:

$i \ldots$ Inklination
$\Omega \ldots$ Länge des aufsteigenden Knotens
$\omega \ldots$ Argument des Perizentrums
$a \ldots$ große Halbachse
$e \ldots$ Exzentrizität



6.8. Bahnelemente

- Die 6 Bewegungsintegrale entsprechen 6 Konstanten, die die Bewegung vollständig beschreiben.
- $(\mathbf{c}, h, \mathbf{e})$ und $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ sind unanschaulich.
- Daher definiert man die Bahn über 6 „Bahnelemente“:

$i \ldots$ Inklination
$\Omega \ldots$ Länge des aufsteigenden Knotens
$\omega \ldots$ Argument des Perizentrums
$a \ldots$ große Halbachse
$e \ldots$ Exzentrizität
$T \ldots$ Perizentrumszeit